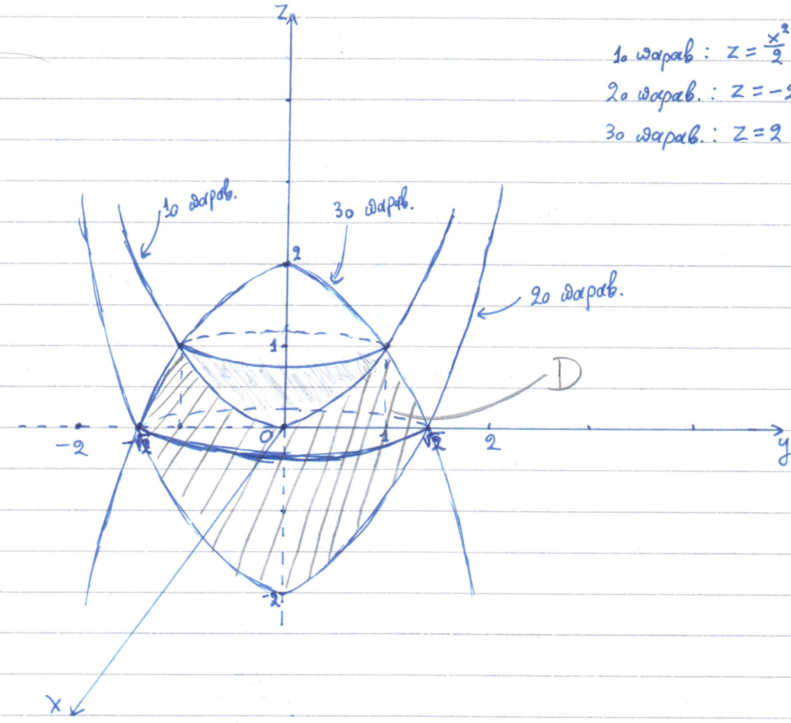
1^{o} παραβ. : $z = \frac{x^2}{2} + y^2$

2^{o} παραβ. : $z = -2 + \frac{x^2}{2} + y^2$

3^{o} παραβ. : $z = 2 - \frac{x^2}{2} - y^2$



Πρώτα θα ξεκαθαρίσουμε τι γίνεται με τα χωρία.

$D_1 = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \,/\, -2 + \frac{x^2}{2} + y^2 \leq z \leq 2 - \frac{x^2}{2} - y^2\}$

(δηλαδή παίρνουμε όλα τα σημεία του χώρου τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στο 2ο και στο 3ο παραβολοειδές)

$D_2 = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{2} + y^2 \leq z \leq 2 - \frac{x^2}{2} - y^2\}$

(δηλαδή όλα τα σημεία του χώρου τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στο 1ο και το 3ο παραβολοειδές)

Έτσι προκύπτει ότι $V(D) = V(D_1) - V(D_2)$

Τώρα θα δούμε πως τέμνονται τα παραβολοειδή μεταξύ τους.
(Θυμίζουμε όμως ότι για να προσδιορίσουμε μια επίπεδη καμπύλη στον χώρο, πρέπει να αναφέρουμε την εξίσωσή της και την εξίσωση του επιπέδου στο οποίο βρίσκεται.)
Έτσι θα μπορέσουμε να ορίσουμε και τα σύνολα A και B.

Για την τομή του 2ου και του 3ου παραβολοειδούς:

$$\left.\begin{array}{l} z=-2+\frac{x^2}{2}+y^2 \\ z=2-\frac{x^2}{2}-y^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=-2+\frac{x^2}{2}+y^2 \\ -2+\frac{x^2}{2}+y^2=2-\frac{x^2}{2}-y^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=-2+\left(\frac{x^2}{2}+y^2\right)^{\nearrow 2} \\ x^2+2y^2=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=0 \\ \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1 \end{array}$$

Δηλαδή τα δύο παραβολοειδή τέμνονται κατά την έλλειψη: $\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1 \\ z=0 \end{array}\right.$

(δηλαδή στο επίπεδο $z=0$ (στο επίπεδο xOy))

Για την τομή του 1ου και του 3ου παραβολοειδούς:

$$\left.\begin{array}{l} z=\frac{x^2}{2}+y^2 \\ z=2-\frac{x^2}{2}-y^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=\frac{x^2}{2}+y^2 \\ \frac{x^2}{2}+y^2=2-\frac{x^2}{2}-y^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=\left(\frac{x^2}{2}+y^2\right)^{\nearrow 1} \\ x^2+2y^2=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=1 \\ \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{1^2}=1 \end{array}$$

Δηλαδή τα δύο παραβολοειδή τέμνονται κατά την έλλειψη: $\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{1^2}=1 \\ z=1 \end{array}\right.$

(δηλαδή στο επίπεδο $z=1$)

Έτσι θεωρούμε τα σύνολα:

$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}\leq 1\right\}$

(Αν το κοιτάξουμε στις δύο διαστάσεις θέλουμε τα εσωτερικά σημεία της έλλειψης γι' αυτό λέμε "≤ 1")

$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{1^2}\leq 1\right\}$

Πάμε για τους όγκους των χωρίων D_1 και D_2.

$$V(D_1) = \iiint_{D_1} 1 \, dx dy dx = \iint_A \left[\int_{-2+\frac{x^2}{2}+y^2}^{2-\frac{x^2}{2}-y^2} 1 \, dz \right] dx dy$$

$$= \iint_A (4 - x^2 - 2y^2) \, dx dy$$

(Επειδή βλέπουμε διαφορετικούς συντελεστές στο x^2 και στο y^2 θα αλλάξουμε σε ελλειπτικές συντεταγμένες).

Θέτουμε λοιπόν $\begin{cases} x = 2r\cos\theta & \text{(το "2" το πήραμε από την εξίσωση της έλλειψης)} \\ y = \sqrt{2}\, r \sin\theta & \text{(το "}\sqrt{2}\text{" επίσης από την εξίσωση της έλλειψης)} \end{cases}$

με $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Επομένως θεωρούμε μετασχηματισμό

$$g(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (2r\cos\theta, \sqrt{2}\, r\sin\theta)$$

$$g^{-1}(A) = \{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

Εδώ συμφωνούμε

- Η g είναι "1-1" στο εσωτερικό του $g^{-1}(A)$ και
- οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial \theta}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς

άρα η g είναι κλάσεως C^1.

- Έτσι έχουμε:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\, r\cos\theta \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\, r \neq 0 \text{ στο εσωτερικό του } g^{-1}(A)$$

- Το $\partial(A)$ είναι αμελητέο.

Επομένως και αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών έχουμε:

$$V(D_1) = \iint_A (4 - x^2 - 2y^2) \, dx dy = \iint_{g^{-1}(A)} (4 - 4r^2\cos^2\theta - 2 \cdot 2r^2 \sin^2\theta) \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r,\theta) \, dr d\theta$$

$$= \iint_{g^{-1}(A)} (4 - 4r^2\cos^2\theta - 4r^2\sin^2\theta) \, 2\sqrt{2}\, r \, dr d\theta$$

$$= \iint_{g^{-1}(A)} (4 - 4r^2)\, 2\sqrt{2}\, r \, dr\, d\theta$$

$$= 8\sqrt{2} \iint_{g^{-1}(A)} (r - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= 8\sqrt{2} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r - r^3)\, d\theta \right) dr$$

$$= 8\sqrt{2} \int_0^1 2\pi (r - r^3)\, dr$$

$$= 16\sqrt{2}\pi \left(\int_0^1 r\, dr - \int_0^1 r^3\, dr \right)$$

$$= 16\sqrt{2}\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 \right]$$

$$= 16\sqrt{2}\pi \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right]$$

$$= 4\sqrt{2}\pi$$

$$\boxed{V(D_1) = 4\sqrt{2}\pi} \quad (1)$$

Όμοια και όπως είναι γραμμένα στις άλλες σημειώσεις

$$\boxed{V(D_2) = \sqrt{2}\pi} \quad (2)$$

Άρα $\boxed{V(D) = V(D_1) - V(D_2) = 3\sqrt{2}\pi}$

Τώρα θα υπολογίσουμε το εμβαδό της επιφάνειας:

Έχει σημασία να καταλάβουμε ποια επιφάνεια θέλουμε, πάνω στο σχήμα.
Η επιφάνεια που θέλουμε είναι αυτή που προκύπτει από το χωρίο D (γραμμοσκ. με τις ρίγες) βάζοντας όμως επιπλέον και την επιφάνεια του "πάτου" του 1ου παραβολοειδούς (αυτό με την διαφορετική γραμμοσκίαση).

Αυτήν την επιφάνεια την χωρίζουμε σε τρία κομμάτια για να υπολογίσουμε πιο εύκολα το εμβαδόν της.

<u>1ο κομμάτι:</u> S_1

Τα σημεία του πρώτου παραβολοειδούς που βρίσκονται στον "πάτο" που αναφέραμε πριν. Πώς θα τα εκφράσουμε;
Λέμε ότι είναι τα σημεία της εξίσωσης
$z = \frac{x^2}{2} + y^2$ που όμως ικανοποιούν την συνθήκη
$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{1^2} \leq 1$ (για να πάρουμε μόνο το κομμάτι που θέλουμε.
Άρα για να το γράψουμε όμορφα:
$S_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = \frac{x^2}{2} + y^2 \text{ και } (x,y) \in B \}$

<u>2ο κομμάτι:</u> S_2

Τα σημεία του δεύτερου παραβολοειδούς από κάτω-κάτω μέχρι το επίπεδο $z=0$ (που τέμνεται με το 3ο παραβ.)
Αυτά είναι τα σημεία της εξίσωσης:
$z = -2 + \frac{x^2}{2} + y^2$ που επιπλέον ικανοποιούν την συνθήκη
$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \leq 1$
Άρα για να το γράψουμε κι αυτό πιο καλά:
$S_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = -2 + \frac{x^2}{2} + y^2 \text{ και } (x,y) \in A \}$

<u>3ο κομμάτι</u>: Τα σημεία που βρίσκονται πάνω σε αυτό το κομματάκι
S_3 που μοιάζει με δαχτυλίδι.

Δηλαδή πρόκειται για τα σημεία της εξίσωσης

$z = 2-\frac{x^2}{2}-y^2$ που επιπλέον ικανοποιούν και τις συνθήκες:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{1^2} \geq 1 \\ \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \leq 1 \end{cases}$$ (σημεία έξω από την έλλειψη που τέμνονται το 1ο και το 3ο)

Θα προσπαθήσουμε να τα γράψουμε καλύτερα:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2 \geq 1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2 \geq 1 \\ 2\frac{x^2}{4}+2\cdot\frac{y^2}{2} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2 \geq 1 \\ \frac{x^2}{2}+y^2 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ 1 \leq \frac{x^2}{2}+y^2 \leq 2 \right.$$

Έτσι ορίζουμε το σύνολο $\Gamma = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq \frac{x^2}{2}+y^2 \leq 2 \right\}$

Άρα έχουμε:

$$S_3 = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, z = 2-\frac{x^2}{2}-y^2 \text{ και } (x,y)\in\Gamma \right\}$$

Έτσι έχουμε:

<u>Για το $E(S_1)$</u>:

$$E(S_1) = \iint_B \sqrt{1+\left(-\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(-\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \iint_B \sqrt{1+\left(-\left(\frac{1}{2}\cdot 2x+0\right)\right)^2+\left(-(0+2y)\right)^2}\,dxdy$$

$$= \iint_B \sqrt{1+x^2+4y^2}\,dxdy$$

Τώρα πάλι τα γνωστά (ελλειπτικές συντεταγμένες):

$x = 2r\cos\theta$ (όπως και πριν το "2" από την εξίσ. της έλλειψης της τομής)

$y = 1\cdot r\,\cancel{\cos}\sin\theta$

(Υποτίθεται ότι έχουμε κάνει αυτήν την αλλαγή και νωρίτερα κατά τον υπολογισμό του όγκου άρα δεν ξαναγράφουμε προϋποθέσεις κι όλα αυτά για το θεωρ. αλλαγής μεταβλητών)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r,\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r$$

Άρα $E(S_1) = \iint_{g^{-1}(B)} \sqrt{1+4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta} \cdot 2r\,dr\,d\theta$

$$= \iint_{g^{-1}(B)} \sqrt{1+4r^2} \cdot 2r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 2r\sqrt{1+4r^2}\,d\theta \right) dr$$

$$= 2\cdot 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

$$= \frac{4\pi}{8} \int_0^1 8r\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1+4r^2)' \cdot (1+4r^2)^{1/2}\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \left[(1+4\cdot 1^2)^{\frac{3}{2}} - (1+4\cdot 0^2)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

Με όμοιο τρόπο: $E(S_2) = \frac{\pi}{3}(5^{3/2}-1)$ και $E(S_3) = \frac{\pi}{3}(5^{3/2}-1)$

Άρα $\boxed{E(S) = E(S_1) + E(S_2) + E(S_3) = \cancel{3}\frac{\pi}{\cancel{3}}(5^{3/2}-1) = \pi \cdot (5\sqrt{5}-1)}$